ÁLGEBRA LINEAL CURSO 2012/2013

NOMBRE:

NOTA…………	

EXAMEN FINAL CONV. DE juliO(1/7/2013)

Ejercicio 1. *(2 ptos)* En el ESPACIO vectorial

y el vector , se pide, entonces:

- ***a)*** *(1 ptos)* Determinar una base ortonormal del subespacio (complemento ortogonal del dado)
- ***b)*** *(1 ptos)* Expresar el vector dado como donde

Ejercicio 2. *(2 ptos)* ***a)*** *(1 ptos)* Obtener todas las aplicaciones ortogonales en ,que transforman el vector en el vector

b) *(1 ptos)* Clasificar las aplicaciones construidas en el apartado anterior, dando sus elementos geométricos.

Ejercicio 3. *(2 ptos)* De una aplicación lineal f sabemos que transforma el vector = (1, -2, 1) en el vector = ($\sqrt{3}$, *0*, -$\sqrt{3}$), el vector en el vector - y sabemos que el vector = (1, 1, 1) es un vector propio asociado al autovalor 1. Se pide:

a) *(1 ptos)* Halle el núcleo y la imagen de la aplicación *f*.

b) *(1 ptos)* Demuestre que es una aplicación ortogonal.

Ejercicio 4. *(2 ptos)* En el espacio vectorial se consideran los subespacios siguientes:

y .

Con estos datos, se pide:

a) Calcular una base de S *(0.2 ptos.)* y las ecuaciones implícitas*(0.2 ptos.)* del subespacio S

b) *(0.3 ptos.)* Calcular una base de

c) *(0.3 ptos.)* Calcular una base del subespacio $S \cap T$

d) Calcular las ecuaciones paramétricas *(0.2 ptos.)* e implícitas*(0.2 ptos.)* *(0.2 ptos.)* del subespacio $S+T$.

e) Justificar si es suma directa o no*(0.1 ptos.)* ¿Son espacios complementarios*(0.1 ptos.)*? *(0.2 ptos.)* Comprobar la fórmula de las dimensiones.

Ejercicio 5. Estudiar si la matriz siguiente es diagonizable o no *(0.2 ptos.)*. En dicho caso, diagonalizar dicha matriz *(1.4 ptos.)* y dar la matriz diagonal asociada *(0.2 ptos.)* y la matriz de diagonalización *(0.2 ptos.)*.

ÁLGEBRA LINEAL	**Curso: 2012-2013**	1$^{\text{er}}$ Apellido: ______	Examen final de julio 1 de julio de 2013
Dpto. Matemática Aplicada Facultad de Informática Universidad Politécnica de Madrid		2$^{\text{o}}$ Apellido: ______ Nombre: ______ Número de matrícula:	**Calificación:**

Ejercicio 5 (2 puntos)

a) Obtener todas las aplicaciones ortogonales en $\mathbb{R}^2$ que transforman $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) Clasificar las aplicaciones construidas en el apartado anterior, dando sus elementos geométricos.

Solución

a) *i*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) *i*) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es un giro de centro el origen y ángulo $\alpha = \arccos\frac{4}{5}$

ii) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una simetría respecto de la recta $3x - y = 0$

Dados los subespacios vectoriales de R^3

$S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right\}$ y $T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in R^3 : \begin{matrix} x-3z=0 \\ y+2z=0 \end{matrix}\right\}$, se pide:

1) Hallar una base y unas ecuaciones implícitas de S.

2) Hallar una base de T.

3) Hallar, si es posible, una base de $S \cap T$.

4) Hallar una base de $S+T$.

5) Justificar si $S+T$ es suma directa. ¿Son S y T subespacios complementarios?. Comprobar la fórmula de las dimensiones

1) Los tres vectores que generan S serán una base si son linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{2}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{H_{32}(2)}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay dos pivotes en esta matriz escalonada por filas y los vectores de esas columnas con pivote son linealmente independientes. Luego

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Podemos escribir que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \lambda \text{ y } \mu \in R.$$

Eliminamos los parámetros

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda & \mu & & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 1 & -1 & z \end{array}\right) \end{array} \underset{H_{31}(-1)}{\overset{H_{21}(-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & y-2x \\ 0 & -2 & z-x \end{array}\right) \overset{H_{2}(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \\ 0 & -2 & z-x \end{array}\right) \overset{H_{32}(2)}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \\ 0 & 0 & z-x+4x-2y \end{array}\right)$$

Para que el rango de la matriz ampliada sea dos es necesario que

$$z+3x-2y=0 \quad , \text{ luego}$$

$$\boxed{3x-2y+z=0}$$ son las ecuaciones implícitas de S.

2)
$$\left.\begin{array}{l} x \quad -3z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\}$$ Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \end{array}\right)$$

z es la variable libre

$$\left.\begin{array}{l} z=\lambda \\ y=-2\lambda \\ x=3\lambda \end{array}\right\} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

son las ecuaciones paramétricas de T.

Luego $B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

3) La intersección de subespacios se obtiene con sus ecuaciones implícitas

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z=0 \\ x \quad -3z=0 \\ y+2z=0 \end{array}\right\}$$ son las ecuaciones implícitas de $S \cap T$

Para hallar una base tenemos que resolver el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{H_{12}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{H_{21}(-3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{H_{23}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 10 & 0 \end{array}\right) \overset{H_{32}(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual al número de incógnitas, luego la solución es

$x = y = z = 0$

$S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ luego no hay base de la intersección.

---

4) La suma de subespacios se realiza con la unión de los conjuntos generadores de ambos

$$S + T = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Para saber si constituyen una base deben ser linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{H_{31}(-1)}{\overset{H_{21}(-2)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Esta matriz escalonada por filas tiene tres pivotes y las tres columnas son vectores linealmente independientes.

Luego $B_{S+T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

---

5) $S + T$ es suma directa porque $S \cap T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

o bien $\dim(S \cap T) = 0$

S y T son subespacios complementarios porque $\dim(S+T) = 3$ que es la $\dim(R^3)$ y además $\dim(S \cap T) = 0$

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S+T) + \dim(S \cap T)$$
$$2 + 1 = 3 + 0$$